
Analytische Näherungslösung für die Bewegungsverläufe von ballistischen Flugkörpern beim Atmosphäreneintritt

NORBERT KIEHNE, DIPL.-ING.

*Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DFL)
Institut für Flugmechanik, Braunschweig, W. Germany*

ABSTRACT

Von den Bewegungsdifferentialgleichungen eines antriebs- und auftriebslosen Fahrzeugs auf einer Eintrittsbahn in die Atmosphäre sind keine allgemeinen analytischen Lösungen bekannt. Vorhandene einfache Näherungslösungen gelten jeweils nur, wenn die Parameter innerhalb bestimmter Grenzen liegen. Es fehlt dabei eine explizite einfache Näherungslösung für einen mittleren Bahnabschnitt, welcher dadurch charakterisiert ist, daß in ihm die gasdynamischen Beschleunigungen die gleiche Größenordnung haben wie die Beschleunigungen auf Grund von Gravitationswirkungen. Für diesen Bahnteil wird eine Lösung angegeben und deren Genauigkeit gegenüber den numerischen Lösungen der Differentialgleichungen untersucht. Es wird gezeigt, daß die Abweichungen der mit der Näherungslösung berechneten Daten gegenüber den 'exakten' Werten selbst für ungünstige Parameterkombinationen vernachlässigbar sind.

BEZEICHNUNGEN

A	km^{-1}	Fahrzeug- und Atmosphärenkenngröße, $A = \varepsilon_b g_0 \sigma \rho_0 / 2 = c_w (\rho_0 / \rho_F) \sigma F / 2V$
c_w	—	Widerstandsbeiwert
c_y, c_t, c_x	—	Integrationskonstanten
D	—	Erhaltungsparameter nach Duncan
F	m^2	Bezugsfläche für den Widerstandsbeiwert
g_0	km/sec^2	mittlere Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche, $g_0 = 9.806 \times 10^{-3}$

h, H	km	Höhe über der Erdoberfläche, $h = r - R_0$
m	kp sec ² /m	Fahrzeugmasse
r	km	Betrag des Radiusvektor
R_0	km	mittlerer Erdradius, $R_0 = 6378$
R_A	km	Apogäumsradius
R_π	km	Perigäumsradius
R_G	km	Grenzradius, $R_G = 6528$
t	sec	Flugdauer, Flugzeit
v	km/sec	Geschwindigkeit im erdfesten, rotierenden System
v_I	km/sec	Geschwindigkeit im inertialraumfesten System
v_A	km/sec	Apogäumsgeschwindigkeit im erdfesten System
v_m	km/sec	Fahrzeuggeschwindigkeit an der oberen Grenze des mittleren Bereichs
V	m ³	Fahrzeugvolumen
x	km	Flugweite
β	km ⁻¹	Zahlenfaktor im exponentiellen Atmosphärenmodell, $\beta = 0.138 \text{ km}^{-1}$ für $h \leq 150 \text{ km}$ $\beta = 0.0222 \text{ km}^{-1}$ für $h > 150 \text{ km}$
γ	rad	Bahnneigungswinkel im erdfesten, rotierenden System
γ'_m	rad/sec	Ableitung des Bahnneigungswinkels nach der Höhe an der oberen Grenze des mittleren Bereichs
ϵ_b	m ² /kp	ballistischer Faktor
ϵ	—	Exzentrizität der Bahnellipse
$\Delta E/E$	—	relative Änderung der spezifischen Energie
ρ	kp sec ² /m ⁴	Luftdichte
ρ_0	kp sec ² /m ⁴	mittlere Luftdichte am Erdboden, $\rho_0 = 0.125$
ρ_F	kp sec ² /m ⁴	mittlere Dichte des Fahrzeugs
σ	—	Zahlenfaktor im exponentiellen Atmosphärenmodell, $\sigma = 1.0$ für $h \leq 150 \text{ km}$, $\sigma = 2.24 \times 10^{-8}$ für $h > 150 \text{ km}$
ψ	rad	Neigungswinkel der Bahnebene gegen die Äquatorebene
ω	rad/sec	Winkelgeschwindigkeit der Erde, $\omega = 0.728 \times 10^{-4}$

Ableitungen nach der Zeit werden durch einen Punkt (·),
Ableitungen nach der Höhe durch einen Strich (') bezeichnet.

Am Ende vieler Raumfahrtunternehmungen — insbesondere bei allen bemannten — steht die Notwendigkeit, mit dem Fahrzeug oder einem Teil davon die Erdatmosphäre zu durchqueren und in einem bestimmten Zielgebiet zu landen. Der Verlauf der Bewegungsgrößen des Flugkörpers während

des Atmosphäreintritts kann mit guter Genauigkeit durch ein System von Differentialgleichungen angegeben werden. Von diesem System sind keine allgemeinen analytischen Lösungen in explizierter Form bekannt, auch nicht für den Sonderfall des auftriebslosen, nicht angetriebenen Fahrzeugs. In der Literatur werden aber eine ganze Reihe von analytischen Näherungslösungen angegeben; diese sind im allgemeinen nur verwendbar, wenn entweder die Anfangswerte innerhalb beschränkter Bereiche liegen — z.B. beim auftriebslosen Flug mit steilem Bahnneigungswinkel — oder wenn nur bestimmte Abschnitte der Flugbahn betrachtet werden, in denen für die Bewegungsgrößen näherungsweise einfache Gesetzmäßigkeiten gelten. R. C. Duncan z.B. gibt für den Fall des auftriebslosen, nicht angetriebenen Fahrzeugs folgende Bereiche und Gesetzmäßigkeiten an:

Einen keplerschen Bereich. Dieses ist der Bahnabschnitt, in welchem die gasdynamischen Kräfte noch sehr klein sind und die wahre Bahn sehr gut angenähert werden kann durch eine keplersche Bahn. Die Bewegungsgrößen können mit den keplerschen Bahngleichungen recht genau bestimmt werden.

Einen 'mittleren' Bereich. In diesem Bahnteil haben die Beschleunigungen auf Grund gasdynamischer Kräfte die gleiche Größenordnung wie die anderen Ausdrücke in den Bewegungsgleichungen.

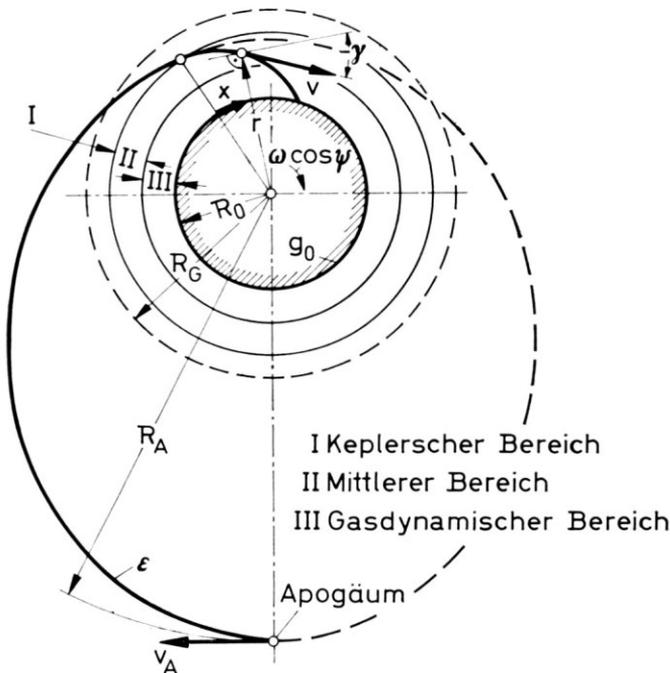


FIG. 1 — Abstiegsbahn eines Raumfahrzeuges

Schließlich einen gasdynamischen Bereich. In diesem Abschnitt sind die gasdynamischen Beschleunigungen die vorherrschenden Ausdrücke und bestimmen somit die Bahnform.

Keplerscher und gasdynamischer Bereich sind im bekannten Schrifttum eingehend untersucht worden und es liegen für beide Bahnabschnitte Näherungslösungen vor. Für den mittleren Bereich sollen im folgenden einfache explizite Gleichungen angegeben werden, die den Verlauf der Bewegungsgrößen mit guter Genauigkeit beschreiben.

Für die Untersuchungen wurden verschiedene Einschränkungen und vereinfachende Annahmen getroffen:

- (a) Das Fahrzeug soll sich antriebslos bewegen.
- (b) Es ist kein aerodynamischer Auftrieb vorhanden.
- (c) Der Abstieg soll aus dem keplerschen Bereich und direkt erfolgen, d.h. das Fahrzeug darf in keinem Fall zeitweilig wieder in den keplerschen Bereich aufsteigen.
- (d) Die Gestalt der Erde wird als kugelförmig angenommen, die Abplattung wird also vernachlässigt.
- (e) Es wird mit einem exponentiellen Atmosphärenmodell gerechnet, für dessen Dichteverteilung gilt

$$\rho = \rho_0 \sigma e^{-\beta h}$$

Hierbei ist ρ die Luftdichte, ρ_0 die mittlere Luftdichte am Erdboden, τ und β Zahlenfaktoren, sowie h die Höhe über der Erdoberfläche.

(f) Die Atmosphäre rotiert mit der Erde, mit anderen Worten: Es wird Windstille vorausgesetzt.

(g) Die Bahn verläuft in einer Ebene, Bewegungen infolge von Seitenkräften werden also vernachlässigt. Diese Annahme ist insbesondere dann sinnvoll, wenn die Bahnebene nur eine geringe Neigung gegenüber der Äquatorebene hat.

(h) Es wird angenommen, daß der ballistische Faktor des Fahrzeugs — zumindest abschnittsweise — konstant ist, d.h. es soll die Beziehung

$$\varepsilon_b = \frac{c_w F}{m g_0} = \text{const}$$

gelten. Hierbei ist ε_b der ballistische Faktor, c_w der Widerstandsbeiwert des Fahrzeugs, der sich bezieht auf die Fläche F ; m ist die Fahrzeugmasse und g_0 die mittlere Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche.

Mit diesen Annahmen kann man die Bewegung eines Raumfahrzeugs beim Abstieg durch die Atmosphäre mit den gezeigten Differentialgleichungen angeben. In diesen Gleichungen stehen auf den linken Seiten die Ableitungen der Bahngrößen nach der Höhe; v ist die Geschwindigkeit und γ der Bahnneigungswinkel, beide im erdfesten rotierenden System; r ist der Betrag des Radiusvektors und R_0 der mittlere Erdradius, ω die Winkel-

$$\frac{dv}{dh} = - \left(\frac{g_0 R_0^2}{r^2} - r \omega^2 \cos^2 \psi \right) \frac{1}{v} - \epsilon_b g_0 \sigma \frac{q_0}{2} \frac{ve^{-\beta h}}{\sin \gamma}$$

$$\frac{d\gamma}{dh} = \frac{\cot \gamma}{r} - \left(\frac{g_0 R_0^2}{r^2} - r \omega^2 \cos^2 \psi \right) \frac{\cot \gamma}{v^2} + \frac{2\omega \cos \psi}{v \sin \gamma}$$

$$\frac{dt}{dh} = \frac{1}{v \sin \gamma}$$

$$\frac{dx}{dh} = \frac{R_0}{r} \cot \gamma$$

FIG. 2 — Differentialgleichungssystem der ballistischen Bewegung

geschwindigkeit der Erde, ψ der Neigungswinkel der Bahnebene gegen die Äquatorebene, sowie schließlich t die Flugdauer und x die Flugweite, gemessen als Projektion der Bahn auf die Erde.

Löst man das Differentialgleichungssystem mit Hilfe eines geeigneten numerischen Verfahrens, so ergeben sich die im Diagramm gezeigten charakteristischen Verläufe für die Höhe, den Bahnneigungswinkel, die Geschwindigkeit und die Flugweite.

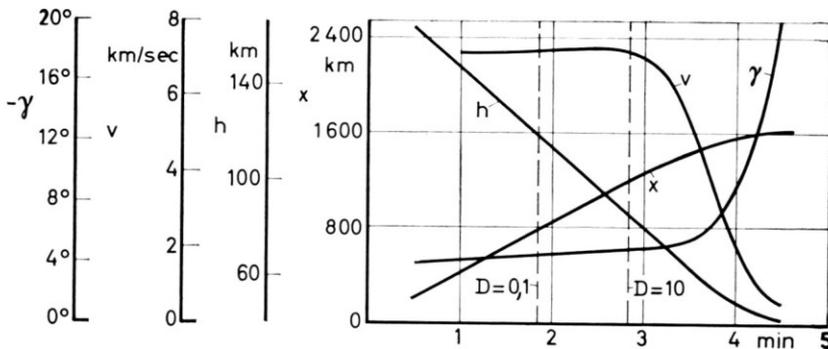


FIG. 3 — Zeitlicher Verlauf der Bahngrößen einer charakteristischen Abstiegsbahn

Es ist jetzt erforderlich, die Grenzen des zu untersuchenden Bahnabschnitts festzulegen. Nach Duncan kann man dafür einen sogenannten Erhaltungsparameter definieren, der sich ergibt aus der Summe von relativer Änderung der Horizontalgeschwindigkeit im Inertialraum und relativer Änderung der Höhe dividiert durch die relative Änderung der Höhe. Der Erhaltungsparameter zeigt den Einfluß der Atmosphäre auf Fahrzeug und Bahn an. Ist keine Atmosphäre vorhanden, bewegt sich das Fahrzeug also

$$D = \left| \frac{\dot{v}_{I\Phi} / v_{I\Phi} + \dot{r}/r}{\dot{r}/r} \right|$$

$$D = \left| \epsilon_b g_0 \sigma \frac{g_0}{2} \frac{r e^{-\beta h}}{\sin \gamma \left(1 + \frac{r \omega \cos \psi}{v \cos \gamma} \right)} \right|$$

FIG. 4 — Erhaltungparameter

auf einer exakten Keplerbahn, dann ist der Parameter gleich Null. Mit wachsendem Einfluß der Atmosphäre wächst auch der Parameter, und je größer die gasdynamischen Kräfte im Verhältnis zu den Trägheitskräften werden, desto größer wird der Erhaltungparameter. Duncan gibt als Grenzen zwischen keplerschen und mittlerem sowie zwischen mittlerem und gasdynamischem Bereich die Werte 0·1 und 10 für den Parameter an. Diese Werte werden auch hier im weiteren verwendet; sie sind eingetragen in dem schon gezeigten Diagramm der Bewegungsgrößen.

Ausgehend von einer Vielzahl von gerechneten Bahnen, wie die im Bild gezeigte, wurden zwei Näherungsansätze für die einfache Berechnung der Bahndaten gemacht:

Erste Annahme: Die Größe der Fahrzeuggeschwindigkeit ist im untersuchten Bereich konstant

Diese Annahme kann man ganz allgemein damit begründen, daß der gasdynamische Term in der Differentialgleichung für die Geschwindigkeit die gleiche Größenordnung hat wie der Term für die Trägheitswirkungen.

Zweite Annahme: Die Änderung des Bahnneigungswinkels in Abhängigkeit von der Höhe ist im untersuchten Bereich konstant

Mit diesen beiden Annahmen ergeben sich aus den Differentialglei-

$$a) \quad v = v_m = \text{const}$$

$$b) \quad \frac{d\gamma}{dh} = \gamma'_m = \text{const}$$

bzw

$$\gamma = \gamma'_m h + c_\gamma$$

FIG. 5 — Annahmen für eine Näherungslösung

chungen die gezeigten Bewegungsgleichungen. Die Werte v_m und γ'_m sind die Randwerte an der oberen Bereichsgrenze. Die Gleichung für die Flugdauer erhält man durch Integration der entsprechenden Differentialgleichung; die

$$t = \int \frac{dr}{v \sin \gamma} = \frac{1}{\gamma'_m v_m} \ln \tan \frac{\gamma}{2} + c_t$$

$$x = R_0 \int \frac{\cot \gamma}{r} dr = R_0 \int \frac{\cot \gamma}{\gamma - c_\gamma} d\gamma$$

$$x \approx \frac{R_0}{c_\gamma} \ln \frac{\gamma - c_\gamma}{\gamma} - \frac{R_0}{3} \left[c_\gamma \ln(\gamma - c_\gamma) + \gamma \right] \left(1 + \frac{c_\gamma^2}{15} \right) -$$

$$- \frac{R_0 \gamma^2}{45} \left(\frac{c_\gamma}{2} + \frac{\gamma}{3} \right) + c_\gamma$$

FIG. 6 — Näherungslösungen für Flugdauer und Flugweite

Integration der Flugweitengleichung ist nicht exakt möglich, kann aber mit einer geringfügigen Vereinfachung durchgeführt werden. Für dieses System von Bewegungsgleichungen bleibt zu zeigen, daß die einzelnen Bewegungsgrößen hinreichend genau durch die Näherungsgleichungen wiedergegeben werden.

Zu diesem Zweck wurden mit den Näherungsgleichungen Bahnen gerechnet und diese dann verglichen mit entsprechenden Bahnen, die sich durch numerische Lösung des Differentialgleichungssystems ergeben.

Für die Vergleichsrechnungen müssen die Parameter, nämlich die Anfangswerte der Variablen und die konstanten Koeffizienten, die gesamten Größenordnungsbereiche durchlaufen, in denen sie bei tatsächlichen Abstiegsbahnen auftreten können.

Der ballistische Faktor ϵ_b , der Zahlenfaktor σ und der Wert für die mittlere Luftdichte am Erdboden — also Größen, die Fahrzeug und Atmosphäre charakterisieren — treten immer in einem geschlossenen Ausdruck auf. Sie

$$A = \epsilon_b g_0 \sigma \frac{\rho_0}{2} = c_w \frac{\rho_0}{\rho_F} \sigma \frac{F}{2V}$$

$$0,2 \text{ km}^{-1} < A < 40 \text{ km}^{-1}$$

FIG. 7 — Atmosphären- und FahrzeugkenngröÙe

werden deshalb in der Kenngröße A zusammengefaßt, die auch geschrieben werden kann als Produkt aus aerodynamischem Widerstandsbeiwert c_w , Verhältnis der Luftdichte am Erdboden zur Fahrzeugdichte, Zahlenfaktor σ und Verhältnis der charakteristischen Fahrzeugfläche zum doppelten Fahrzeugvolumen. Durch Einsetzen von in Frage kommenden Werten kann man leicht ersehen, welche Werte die Größe A annehmen kann. Als Grenzen, innerhalb derer der Einfluß der Kenngröße auf die Genauigkeit der Näherungslösungen untersucht werden muß, wurden $0,2 \text{ km}^{-1}$ und 40 km^{-1} festgelegt.

Die Anfangswerte der Bewegungsgrößen im mittleren Bereich sind zugleich die Endwerte des keplerschen Bereiches, sie müssen also den keplerschen Bewegungsgesetzen gehorchen. Da die Lage der Bahnellipse zur Erde ohne Einfluß auf die Gleichungen ist, bleiben die Anfangswerte für drei Bewegungsgrößen festzulegen. Einer davon, zweckmäßigerweise der Radiusvektor am oberen Rand des mittleren Bereiches, wird aus der schon angegebenen Beziehung für die Festlegung der Bereichsgrenze ermittelt. Durch die beiden übrigen Anfangswerte werden Form und Größe der Bahnellipse festgelegt; statt des Bahnneigungswinkels und der Geschwindigkeit wurden dazu der Apogäumsradius und die Exzentrizität benutzt.

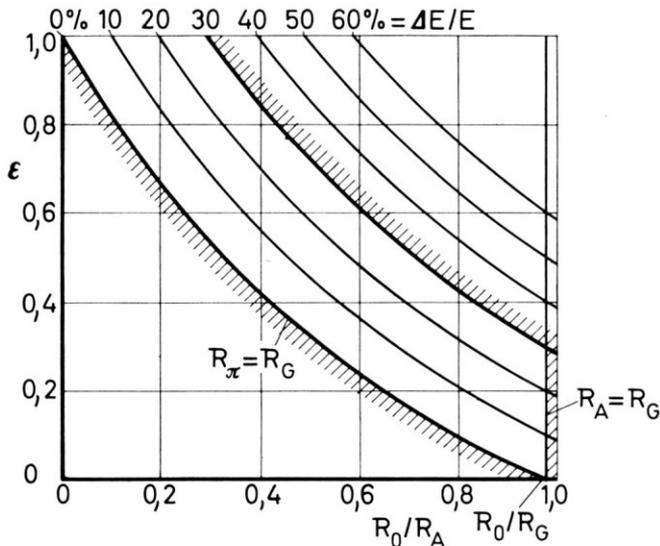


FIG. 8 — Darstellung der Parameterbereiche der Eintrittselipsen

Beide Größen müssen für die Berechnungen so verändert werden, daß alle denkbaren Bahnellipsen im untersuchten Bereich liegen.

Es können folgende Begrenzungen angegeben werden: Das Fahrzeug soll

sich vor dem Abstieg außerhalb der Atmosphäre befinden, das Apogäum muß sich also oberhalb einer Grenzhöhe befinden, unterhalb welcher die Bahn im allgemeinen von der Atmosphäre merklich beeinflusst wird. Es wurde für diese Grenze eine Höhe von 150 km gewählt.

Weiterhin muß das Perigäum innerhalb der Atmosphäre liegen, d.h. also jedenfalls unterhalb der Grenzhöhe, damit der Abstieg gewährleistet ist. Die tatsächliche Begrenzung ist im Normalfall sogar noch enger, da die Näherungslösung nur für den direkten Abstieg angesetzt ist. Liegt das Perigäum gerade innerhalb der Atmosphäre, so kann es, wenn das Fahrzeug große kinetische Energie besitzt, zum Wiederaustrreten aus dem wirksamen Atmosphärenbereich kommen. Die jeweilige exakte Grenze des 'Eintrittskorridors' ist allerdings von Fahrzeug und Atmosphäre abhängig. Es wurde deshalb darauf verzichtet, eine genauere Begrenzung zu verwenden, dieses um so mehr, als sich bei den Berechnungen exaktere Werte für die Grenze aus der numerischen Lösung der Differentialgleichungen ergeben.

Bei einer gerade noch stabilen Umlaufbahn liegt das Perigäum am Rande der Atmosphäre. Eine Abbremsung des Fahrzeugs zur Einleitung des Abstiegs entspricht einer Verringerung der kinetischen Energie. Zum Abstieg wird man nur Bahnen verwenden, bei denen die Energieverminderung gegenüber der gerade noch stabilen Bahn einen bestimmten Prozentsatz nicht überschreitet. Muß diese Energieminderung nämlich durch Bremschub aufgebracht werden, so wird man schon der Treibstoffersparnis wegen nicht über eine gewisse Grenze hinausgehen. Außerdem würde ein Überschreiten dieser Grenze gleichzeitig bedeuten, daß die aerodynamische Verzögerung und die Aufheizung des Fahrzeugs unzulässig groß werden. Es wurden deshalb nur Bahnen untersucht, die gegenüber der gerade noch stabilen Umlaufbahn eine um höchstens 30% geringere Gesamtenergie besitzen.

Um die charakteristischen Verläufe der Bahngrößen und der Fehler zu erkennen, wurden eine Reihe von Bahnen schrittweise berechnet und die Abweichungen ermittelt zwischen den mit Hilfe der Näherungslösungen gewonnenen und den sogenannten exakten Ergebnissen, wobei dieses die numerischen Lösungen der vorhin gezeigten Differentialgleichungen sind.

Für den logarithmisch über der Höhe aufgetragenen Erhaltungsparameter ergeben sich nahezu exakte Geraden, die bei Bahnen mit gleichem Apogäumsradius praktisch parallel verlaufen: Bahnen 4, 2 und 5. Der mittlere Bereich, begrenzt durch $\log D = \pm 1.0$, hat bei allen fünf Bahnen etwa die gleiche Ausdehnung, er liegt aber bei verschiedenen Anfangswerten in verschiedenen Höhen.

Die Geschwindigkeiten sind weitgehend konstant. Die Abweichungen zwischen exakten und Näherungslösungen bestehen in überwiegendem Maße jeweils aus einem linear und einem quadratisch von der Höhe abhängigen Anteil, die sich teilweise gegeneinander aufheben.

Im nächsten Diagramm sind die Bahnneigungswinkel über der Höhe

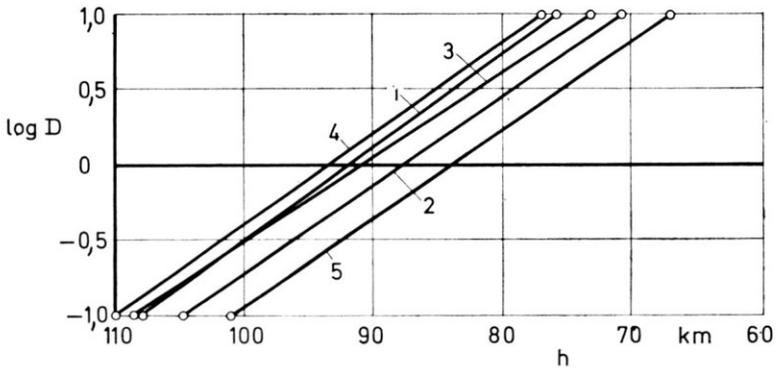


FIG. 9 — Verlauf des Erhaltungparameters in Abhängigkeit von der Höhe

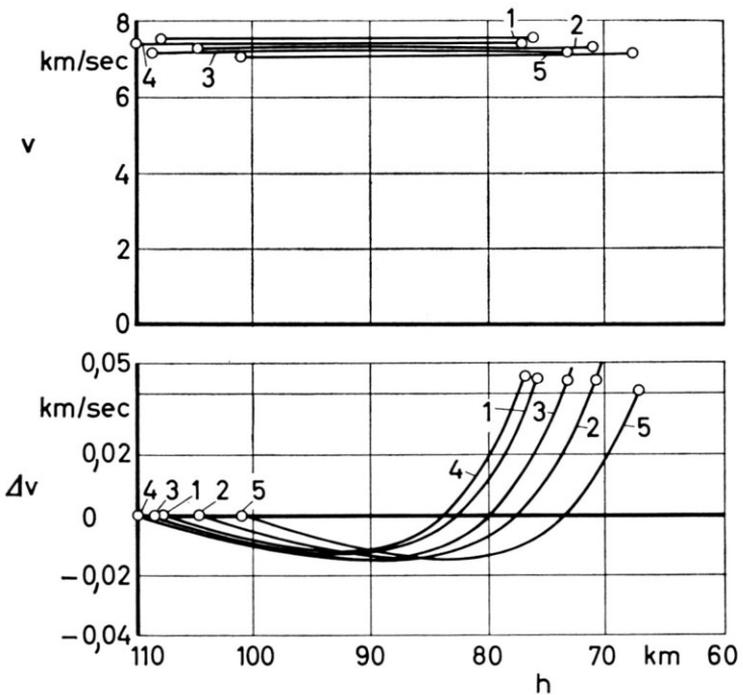


FIG. 10 — Verlauf der Fahrzeuggeschwindigkeit und deren Fehler in Abhängigkeit von der Höhe

dargestellt. Auch hier erscheint die anfangs getroffene Annahme als sinnvoll; die Bahnneigungswinkel sind praktisch linear von der Höhe abhängig. Die Abweichungen haben quadratisch und kubisch von der Höhe abhängige Anteile, welche sich wieder teilweise aufheben.

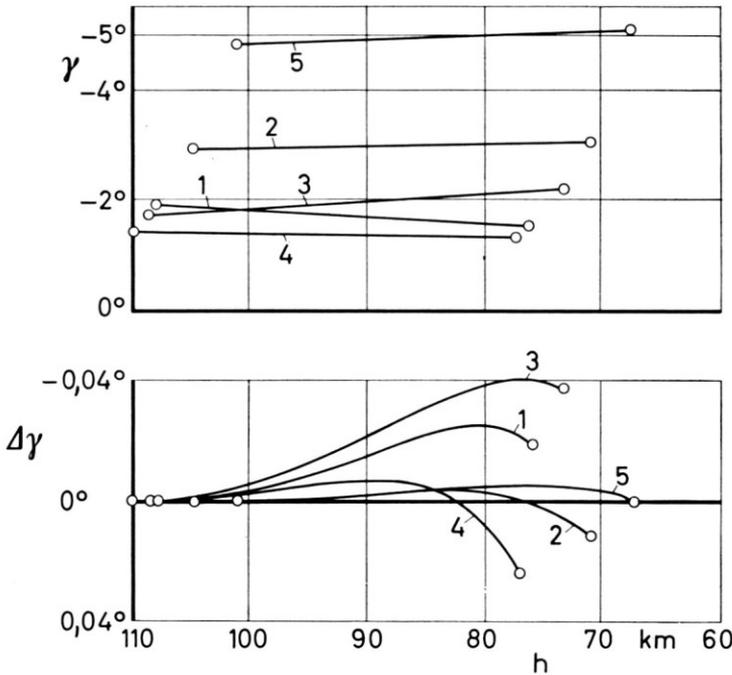


FIG. 11 — Verlauf des Bahnneigungswinkels und dessen Fehler in Abhängigkeit von der Höhe

Den Zusammenhang zwischen der Flugdauer und der Höhe gibt das nächste Diagramm wieder. Die zugehörigen Fehler sind abhängig nur von den Abweichungen der Geschwindigkeiten und Bahnneigungswinkel, da die Flugdauer durch exakte Integration ermittelt wurde.

Die Ergebnisse für die Flugweite sind weitgehend gleich denen für die Flugdauer. Die Fehler durch die nur näherungsweise durchgeführte Integration sind bei den gerechneten Beispielen offensichtlich vernachlässigbar gegenüber den Abweichungen, die sich aus den Ungenauigkeiten von Geschwindigkeit und Bahnneigungswinkel ergeben.

Die bisher gezeigten Ergebnisse der Untersuchung geben keinen Überblick über die Abhängigkeit der Fehlergrößen von den verschiedenen Bahnparametern. Es wurde deshalb eine große Zahl von Bahnen berechnet, deren Anfangswerte über den gesamten möglichen Bereich verstreut sind. Alle

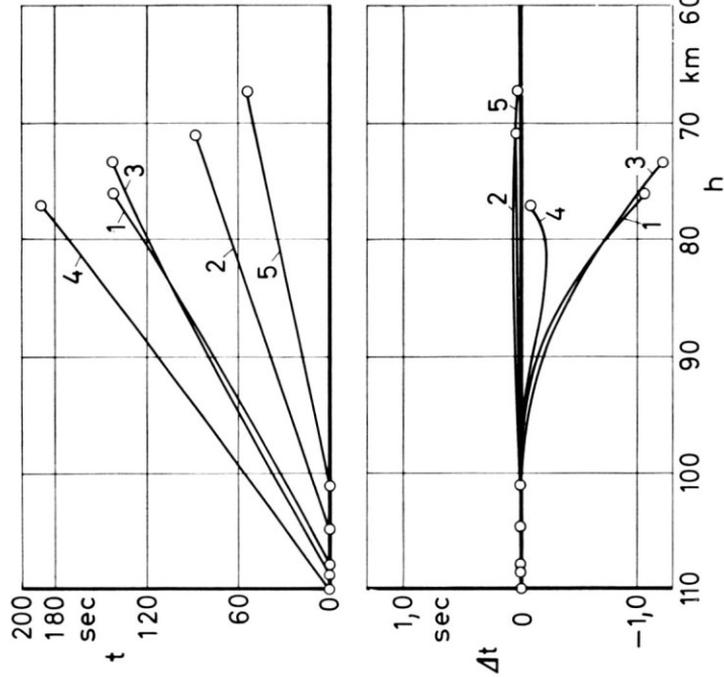


Fig. 12 — Verlauf der Flugdauer und deren Fehler in Abhängigkeit von der Höhe

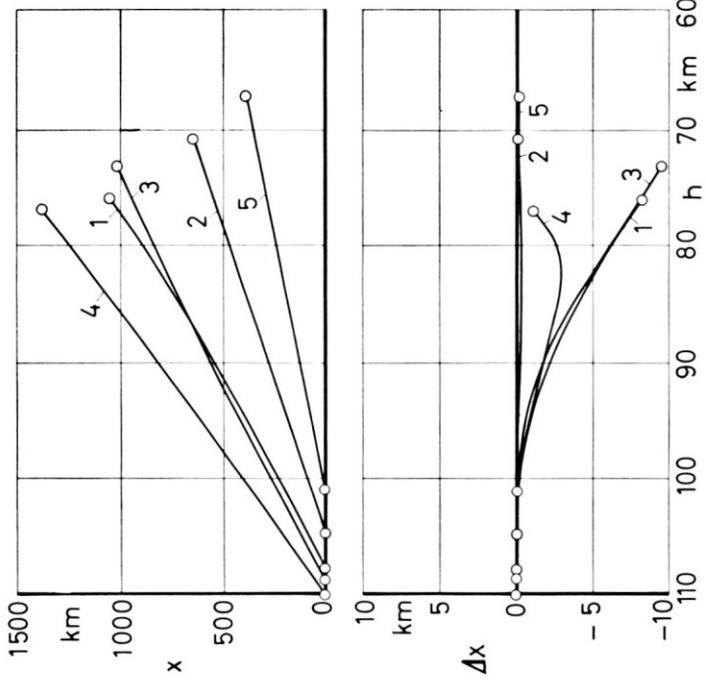


Fig. 13 — Verlauf der Flugweite und deren Fehler in Abhängigkeit von der Höhe

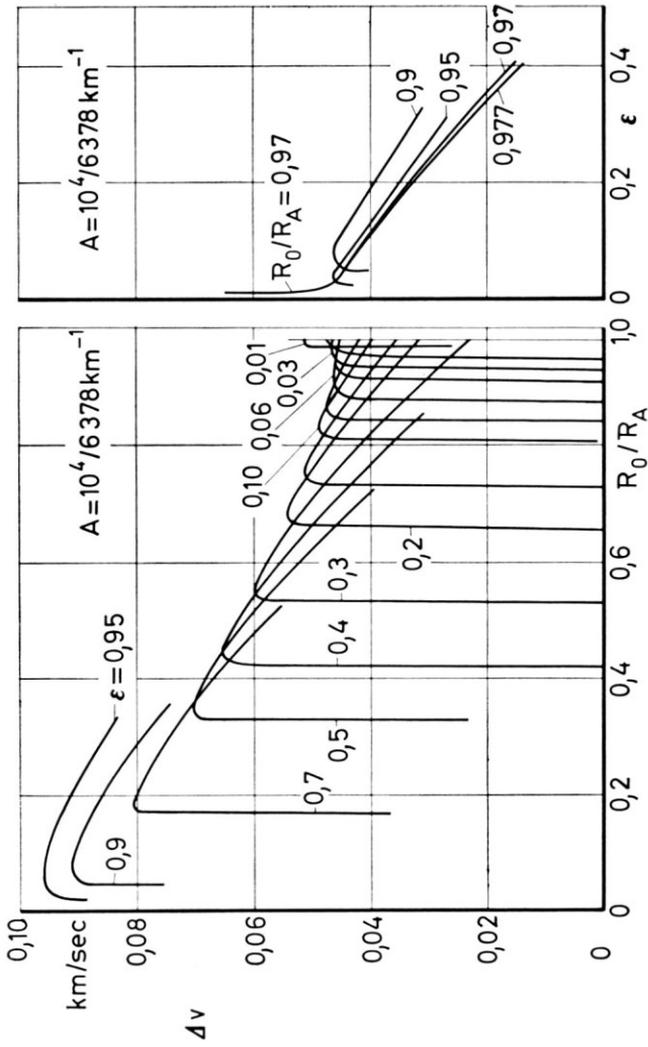


FIG. 14 — Abhängigkeit des Geschwindigkeitsfehlers von der Exzentrizität und dem Apogäusradius

Bahnen wurden nacheinander mit verschiedenen Werten für die Atmosphären- und Fahrzeugkenngröße gerechnet. Für die Fehler der einzelnen Bahnen wurde nicht der ganze Verlauf ermittelt, sondern nur der Wert an der unteren Grenze des mittleren Bereiches sowie der Maximalwert.

Im nächsten Diagramm sind die Werte der Geschwindigkeitsabweichungen für die untere Bereichsgrenze über dem reziproken, mit dem Erdradius normalisierten Apogäumsradius aufgetragen, wobei die Exzentrizität als Parameter erscheint. Für kleine Werte des Apogäumsradius ist die Geschwindigkeitsabweichung daneben über der Exzentrizität mit R_0/R_A als Parameter aufgetragen.

Die aus diesen Linien ermittelten Linien gleicher Fehlergröße sind im folgenden Diagramm in Abhängigkeit von den Anfangswerten der Bahnen dargestellt.

Man erkennt aus beiden Bildern, daß im gesamten möglichen Bereich die Fehlerwerte unter 0,1 km/sec liegen. Im Innern des Bereichs liegt der Fehler zwischen etwa 0,02 und 0,1 km/sec; er ist näherungsweise umgekehrt proportional ϵ und R_0/R_A . Zur Bereichsgrenze $R_\pi = R_G$ hin, wenn das Perigäum der Keplerbahn also gerade noch am Rande der Atmosphäre liegt, fällt der

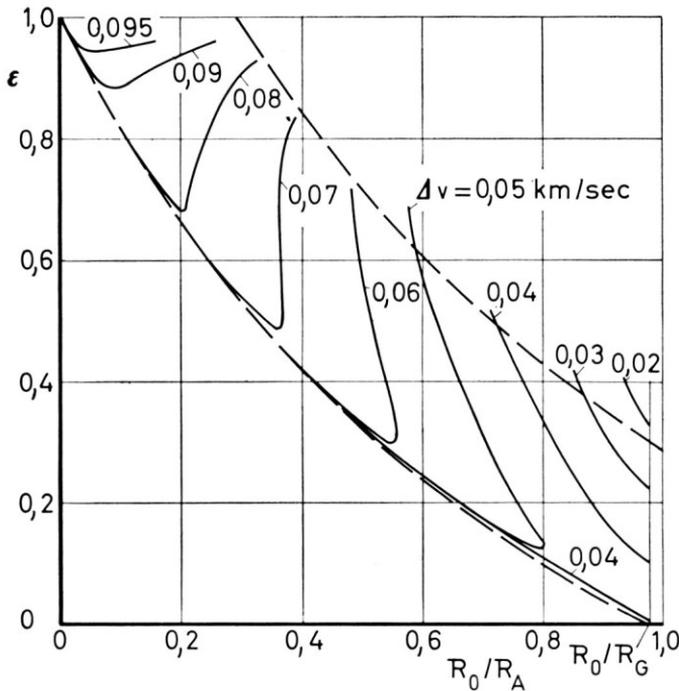


FIG. 15 — Linien gleicher Geschwindigkeitsfehler im Parameterbereich der Eintrittsellipsen

Fehler steil ab und erreicht negative Werte. Die Annäherung an diese Bereichsgrenze bedeutet physikalisch, daß man von monoton absteigenden Bahnen zu solchen gelangt, bei denen sich das Fahrzeug durch hohe kinetische Energie zeitweilig wieder von der Erde entfernt und schließlich sogar wieder aus dem mittleren Bereich austreten kann. Es ergibt sich somit eine ganz andere Art von Bahnen, deren Berechnung mit den vorgeschlagenen Näherungsgleichungen nicht vorgesehen war. Zur Bereichsgrenze $R_A = R_G$ hin steigt der Fehler an, erreicht jedoch nur Werte innerhalb der genannten Grenzen.

Die dargestellten Fehlerwerte ergeben sich für die untere Grenze des mittleren Bereichs, sie sind aber für fast alle Parameterkombinationen zugleich die Maximalwerte der jeweiligen Fehlerkurven. An den Parameterbereichsgrenzen $R_\pi = R_G$ und $R_A = R_G$ ist der in den Bildern dargestellte Fehlerwert mitunter kleiner als der Maximalwert; in diesen Fällen liegen jedoch beide Werte immer unter ± 0.03 km/sec bzw. unter 0.5%.

Im gesamten zugelassenen Parameterbereich liegt der Fehler der Fahrzeuggeschwindigkeit unter 1%.

Die Atmosphären- und Fahrzeugkonstante A hat nur einen sehr geringen Einfluß auf die Fehlergröße, es ergaben sich für alle verwendeten Werte praktisch identische Ergebnisse. Lediglich bei Bahnen mit großer Exzentrizität und einem Apogäum dicht am Rande der Atmosphäre bestehen geringe Unterschiede zwischen den Geschwindigkeitsfehlern; bei allen übrigen Bahnen haben die Unterschiede die gleiche Größenordnung wie die Rechenungenauigkeiten. Die Unterschiede sind in jedem Fall zu vernachlässigen.

Entsprechend der Darstellung des Geschwindigkeitsfehlers ist der Fehler des Bahnneigungswinkels in den nächsten beiden Diagrammen aufgetragen. Das erste zeigt den Winkelfehler über R_0/R_A mit ε als Parameter sowie für große Werte von R_0/R_A den Winkelfehler über ε mit dem Apogäumradius als Parameter. Das zweite Diagramm gibt die Lage der Linien gleichen Winkelfehlers in Abhängigkeit von Exzentrizität und Apogäumradius wieder.

Man erkennt, daß der Winkelfehler im größten Teil des Parameterbereichs sehr klein ist, etwa kleiner als 0.02° und kleiner als 1%.

An der Bereichsgrenze $R_A = R_G$ steigt der Fehler mit zunehmender Exzentrizität relativ steil an. Es ergeben sich hier auch erhebliche Unterschiede für die verschiedenen Werte der Atmosphären- und Fahrzeuggröße A . Je größer sie ist, je größer und leichter also das Fahrzeug ist, desto größer ist der Fehler. Er wird allerdings sehr schnell kleiner mit steigender Apogäumshöhe. Es ist nicht anzunehmen, daß Fahrzeuge der extremen Kategorie mit sehr großem A von Umlaufbahnen mit extrem niedrigem Apogäum gezielt gelandet werden sollen. Gibt man für diese Fahrzeuge eine Apogäumshöhe von mindestens 200 km vor, d.h. $R_0/R_A \approx 0.97$, so ist der Bahnneigungsfehler im bisher diskutierten Bereich kleiner als 0.3° und kleiner als 4%.

Mit Ausnahme des Gebietes für kleine Apogäumshöhen ist der Fehler

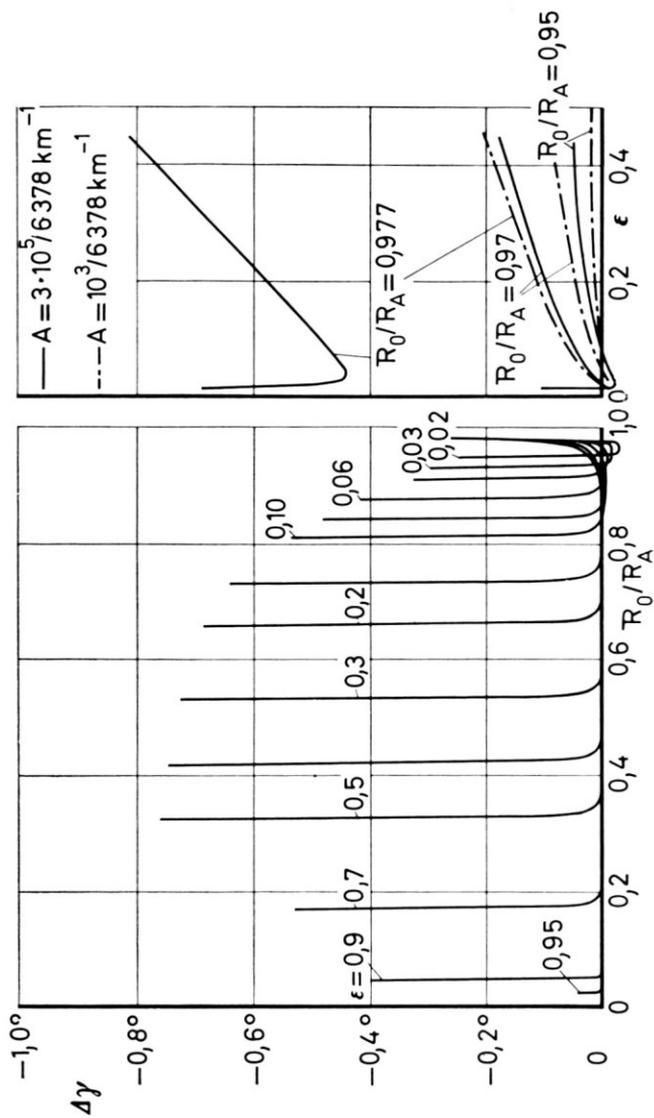


FIG. 16 — Abhängigkeit des Fehlers des Bahnneigungswinkels von der Exzentrizität und dem Apogäumsradius

des Bahnneigungswinkels von der Atmosphären- und Fahrzeugkonstanten A nahezu unabhängig. Die Unterschiede zwischen den Fehlern sind so klein, daß sie vernachlässigt werden können.

Je näher die Bahnen an der Grenze $R_\pi = R_G$ des Parameterbereichs liegen, desto größer wird der Winkelfehler, und und zwar steigt er in unmittelbarer Nähe dieser Grenze extrem steil an.

Dieser Fehleranstieg ist wieder darin begründet, daß die Bahnen zu dieser Grenze hin ihren Charakter von monoton absteigenden zu sogenannten Hüpfbahnen mit zeitweiligem Wiederaufsteigen des Fahrzeugs verändern. Wie schon gesagt, sollen letztere Bahnen in dieser Arbeit nicht untersucht werden. Damit liegt der Fehler des Bahnneigungswinkels in jedem zulässigen Fall unter der schon genannten Begrenzung von 0.3° . Der prozentuale Fehler kann zwar größere Werte als 4% erreichen, weil der Bahnneigungswinkel bei sehr niedrigen fast kreisförmigen Bahnen sehr klein wird; aber der absolute Fehler wird dann ebenfalls sehr klein und liegt deutlich unter der genannten Grenze von 0.3° .

Die dargestellten Winkelfehler ergeben sich für die untere Grenze des mittleren Bereichs, sie sind jedoch für fast alle Parameterkombinationen zugleich die Maximalwerte der Fehlerkurven. Dort wo dieses nicht der Fall

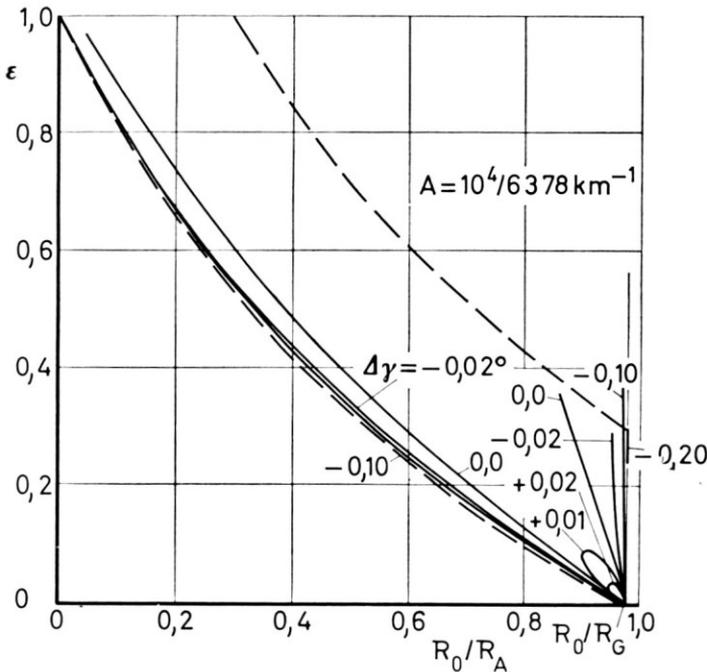


FIG. 17 — Linien gleicher Fehler des Bahnneigungswinkels im Parameterbereich der Eintrittselipsen

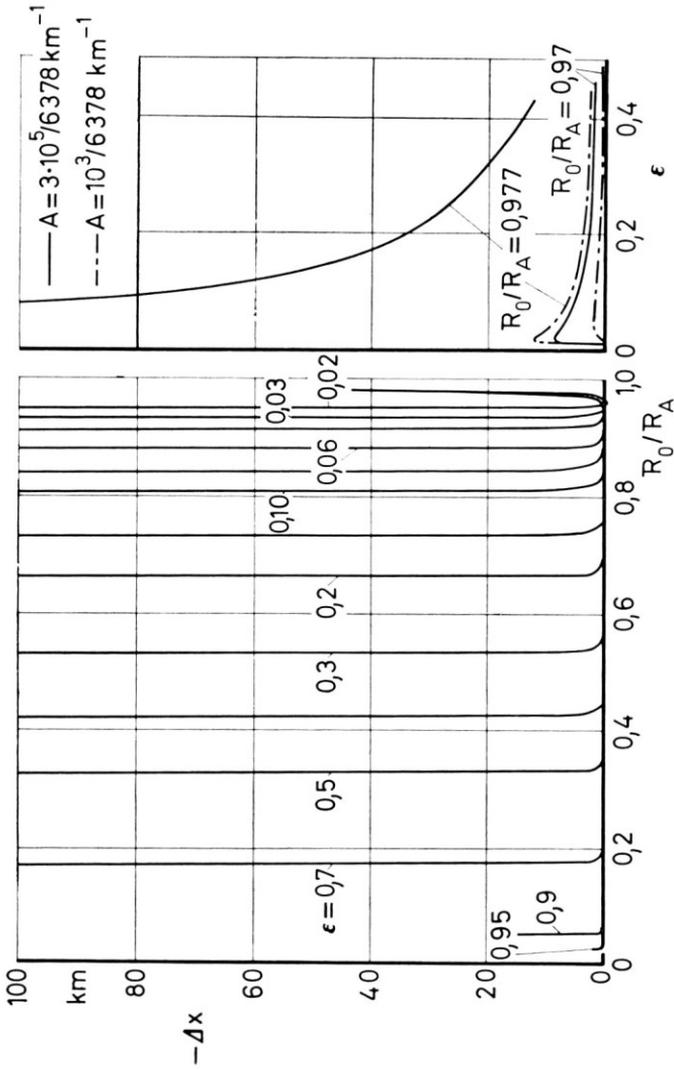


Fig. 18 — Abhängigkeit des Flugweitenfehlers von der Exzentrizität und dem Apogäumradius

ist, liegt der Maximalfehler unter 0.1° , und zwar in den meisten Fällen erheblich darunter.

Die Fehler der Flugweite sind im nächsten Diagramm aufgetragen. Die Fehlerkurven sind ähnlich denen des Bahnneigungswinkels, der Flugweitenfehler hängt also überwiegend ab vom Bahnneigungsfehler. Im Vergleich dazu, ist die Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsfehler und von den Vernachlässigungen bei der Integration sekundär. Es gelten deshalb auch analog die Aussagen über den Fehler des Bahnneigungswinkels. Allerdings mit einer Einschränkung: Bei sehr kleinen Apogäumshöhen steigt der Fehler zwar auch mit abnehmender Apogäumshöhe und zunehmender Kenngröße A an, er nimmt aber ab mit wachsender Exzentrizität; d.h. je kreisförmiger die Umlaufbahn ist, desto größer ist der Flugweitenfehler. Mit Einschränkungen hinsichtlich der Parameterbereichsgrenzen, die den beim Bahnneigungswinkel gemachten entsprechen, kann festgestellt werden, daß der Flugweitenfehler entweder kleiner als 3% ist oder aber — für kleine Flugweiten — unter 1 km liegt.

Der Fehler der Flugdauer ist wegen der exakten Integration nur von den Fehlern der Fahrzeuggeschwindigkeit und des Bahnneigungswinkels abhängig. Wie die Rechnungen zeigen, überwiegt dabei wieder die Abhängigkeit vom Winkelfehler. Die sich ergebenden Zeitfehler liegen in der gleichen Größenordnung wie die Fehler von Bahnneigungswinkel und Flugweite, und zwar ist selbst bei ungünstigen Parameterkombinationen der relative Fehler kleiner als 3%. Der Absolutwert des Fehlers liegt selbst bei sehr langer Flugdauer — z.B. 500 sec — unter etwa 6 sec.

Die Untersuchungen zeigen, daß die Verwendung der Näherungslösungen beschränkt bleibt für monoton absteigende Bahnen. Bahnen, mit zeitweiligem Wiederaufsteigen des Fahrzeugs und evtl. Rückkehr in den keplerischen Bereich sind mit dem in dieser Arbeit angegebenen Gleichungssystem nicht zu berechnen. Eine weitere Einschränkung ist die Forderung nach einer Mindestausgangshöhe von 150 bis 200 km über der Erdoberfläche. Beide genannten Forderungen wurden aber schon in der Aufgabenstellung voraus-

$$\begin{array}{l}
 |\Delta v| < 0,1 \text{ km/sec} \qquad \left| \frac{\Delta v}{v} \right| < 1\% \\
 |\Delta \gamma| < 0,3^\circ \\
 \left| \frac{\Delta x}{x} \right| < 3\% \quad \text{oder für kleines } x \quad |\Delta x| < 1 \text{ km} \\
 \left| \frac{\Delta t}{t} \right| < 3\%
 \end{array}$$

FIG. 19 — Fehler der Näherungslösung

gesetzt. Für die verbleibende Gruppe von Abstiegsbahnen ergeben sich bei der Berechnung mit den gezeigten Näherungslösungen einerseits und der 'exakten' Berechnung durch numerisches Lösen der Differentialgleichungen andererseits Abweichungen zwischen den berechneten Bahngrößen; für diese Abweichungen gelten die nochmals gezeigten Grenzwerte.

Der Geschwindigkeitsfehler ist kleiner als 0.1 km/sec bzw. 1%. Der Fehler des Bahnneigungswinkels ist kleiner als 0.3° . Die Abweichungen der Flugweite sind kleiner als 3% oder bei kleinen Flugweiten kleiner als 1 km. Schließlich ist der Fehler der Flugdauer ebenfalls kleiner als 3%. In den meisten Fällen sind die tatsächlichen Abweichungen wie aus den Diagrammen zu sehen war, erheblich geringer.

Auf Grund dieser Ergebnisse kann festgestellt werden, daß die Näherungsgleichungen zur Berechnung der Bahndaten von Abstiegsbahnen verwendet werden können, wenn die angegebenen Ungenauigkeiten zulässig sind.